Tentamen Numerieke Wiskunde I

23 januari 2009 8.30-11.30 uur

Bij dit tentamen mag een (grafische) rekenmachine worden gebruikt.
Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Een antwoord zonder uitleg of berekening zal dus niet worden goed gerekend. Succes !

Vermeld op elk vel papier je naam, studentnummer en jaar van inschrijving.

Gratis: $\boxed{10}$

Practica: $\boxed{10}$ Voor de 5 computerpractica zijn maximaal 2 punten per practicum te verdienen.

1. Om het snijpunt te bepalen van $f_1(x)=e^x$ en $f_2(x)=x^2$ moet worden opgelost $e^x - x^2 = 0$. Uit een plaatje blijkt dat het snijpunt ligt bij $x \approx -0.7$. Een successieve substitutie methode maakt gebruik van het iteratie voorschrift $x_{n+1} = g(x_n)$. Er wordt begonnen met $x_0 = 0$.
   (a) $\boxed{5}$ Bepaal bij dit probleem een geschikte functie $g(x)$, die lineaire convergentie geeft, met optimale (lineaire) convergentie factor. Toon aan dat deze $g(x)$ voldoet aan de voorwaarde(n) voor convergentie.
   Opmerking: de Newton methode heeft kwadratische convergentie en mag dus niet.
   (b) $\boxed{4}$ Leg uit hoe je met opeenvolgende iteraties een schatting van de fout kunt bepalen.

2. Het stelsel vergelijkingen: $e^x + y = 1$, $x^2 + y^2 = 1$, met oplossing $(x, y) = (0, 1)$, kan worden gevonden met de Newton methode, met startpunt $(x_0, y_0) = (1, 1)$.
   (a) $\boxed{4}$ Bepaal het iteratievoorschrift van de Newton methode bij dit probleem.
   (b) $\boxed{3}$ Wat is het grote nadeel van de Newton methode? Hoe kan dat worden omzeild?
   (c) $\boxed{3}$ Waarom is $(x_0, y_0) = (0, 0)$ niet geschikt als startoplossing?

3. Gegeven is de integraal $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ met exacte waarde 2.
   (a) $\boxed{3}$ Hoe groot is de bijdrage van het deelinterval [0.4 0.42] aan de totale integraal ($I=2$) als de Trapeziumregel wordt toegepast op een rooster met 50 deelintervallen?
   (b) $\boxed{3}$ Waarom zal de orde van convergentie voor de Simpsonregel niet optimaal zijn?

   Via substitutie wordt de integraal herschreven tot $I = \int_0^1 6x^2\, dx$.
   Met een numerieke integratie methode is onderstaand resultaat verkregen. Hierin is $I(n)$ de benaderde waarde van de integraal op een rooster met n deelintervallen.

n	$I(n)$	absolute fout
2	1.8750000000000	1.250E-1
4	1.9687500000000	3.125E-2
8	1.9921875000000	7.813E-3
16	1.9980468750000	1.953E-3
32	1.9995117187500	4.883E-4
64	1.9998779296876	1.221E-4
128	1.9999694824218	3.052E-5

Z.O.Z.

(c) $\boxed{4}$ Bepaal de convergentie orde en vervolgens hoeveel gridhalveringen er nog nodig zijn voor een fout van (maximaal) 10^{-8}.

(d) $\boxed{4}$ Geef een schatting voor de fout van $I(64)$ op basis van $I(n)$ benaderingen en vergelijk deze met de werkelijke fout.

(e) $\boxed{4}$ Bepaal via extrapolatie m.b.v. $I(32)$ en $I(64)$ een betere benadering van de integraal en vergelijk het resultaat met $I(128)$.

4. Beschouw op [0 1] de differentiaalvergelijking $y' = -4y + x^2$, met randvoorwaarde $y(0) = 1$.

   (a) $\boxed{4}$ Toepassen van de impliciete Euler methode geeft een impliciete uitdrukking voor y_{n+1}. Toon aan, via herschrijven van deze uitdrukking, dat de methode stabiel is voor de gegeven differentiaalvergelijking.

   (b) $\boxed{5}$ De Rechthoek methode voor differentiaalvergelijkingen kan worden afgeleid uit de Rechthoek methode voor numerieke integratie.
   (1) Bepaal de uitdrukking voor de Rechthoek methode bij de gegeven vergelijking.
   (2) Tot welke categorie hoort de verkregen methode?

   (c) $\boxed{4}$ Iemand past een methode toe met (globaal) $\mathcal{O}(h^3)$ nauwkeurigheid.
   Leg uit hoe je m.b.v. oplossingen op twee roosters (h en $h/2$) een verbeterde oplossing kunt construeren. Wat is hierbij de verkregen orde van nauwkeurigheid?

   (d) $\boxed{3}$ Toon aan dat de Trapezium methode kan worden verkregen via combinatie van de impliciete en de expliciete Euler methode.

5. Beschouw de vergelijking $Ax = b$, met
$$A = \begin{pmatrix} 20 & 6 & 2 \\ 4 & -20 & 6 \\ 2 & 6 & 20 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (a) $\boxed{5}$ Bepaal de iteratiematrix en lineaire convergentie factor voor de Jacobi methode.

   (b) $\boxed{3}$ Is de methode van Gauss-Seidel convergent voor dit geval? Waarom?

   (c) $\boxed{3}$ Leg uit hoe je de optimale parameter ω_{opt} voor de SOR methode kunt bepalen.
   Let op: je hoeft de waarde van ω_{opt} niet te bepalen.

   (d) $\boxed{5}$ Legt in het kort uit hoe, in het algemeen, de snelste directe oplosmethode werkt als A een tri-diagonale matrix is.

6. Beschouw op [0 1] voor $\phi(x,t)$ de diffusievergelijking $\partial/\partial t = \kappa\,\partial^2/\partial x^2$, met $k = 10^{-3}$, en beginvoorwaarden $\phi(x,0) = 100\sin(\pi x)$ en randvoorwaarden $\phi(0,t) = \phi(1,t) = 0$.

   (a) $\boxed{4}$ Geef de diffentievergelijking als voor $\frac{\partial}{\partial t}$ de expliciete Euler methode wordt gebruikt, in combinatie met (centrale) ruimtelijke discretisatie voor $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ en constante Δx.

   (b) $\boxed{4}$ Leidt de algemene stabiliteitslimiet af voor de methode bij (a). Wat is de maximale tijdstap als een rooster wordt gebruikt met $\Delta x = 1/200$?

   (c) $\boxed{3}$ Geef een voordeel en een nadeel van impliciete tijdsdiscretisatie.

Totaal: $\boxed{100}$

8+9+18+11+14+9 69 (69)

Numerieke Wiskunde 23-01-2009

$\boxed{8}$

1a $e^x - x^2 = 0$ $p = -0{,}7$ $x_0 = 0$

$g(x) = \alpha(e^x - x^2) + x$ $x_{n+1} = \alpha(e^{x_n} - x_n^2) + x_n$

$g'(x)$ moet absoluut kleiner zijn dan 1 in het interval

4 $g'(x) = \alpha e^x - 2\alpha x + 1$

Op het meest optimale geval is ~~g(0)~~ dan $g'(x_0) = 0$ → eigenlijk in $x = -0{,}7$ kijken

$1 + \alpha(e^{x_0} - 2x_0) = 0 \Rightarrow \alpha(e^{x_0} - 2x_0) = -1 \Rightarrow \alpha(1-0) = -1$ $\alpha = -1$

~~[illegible]~~

Er is ook convergentie bij ~~[illegible]~~ ~~(het snijpunt) bekijk snijpunt~~ het snijpunt $x=-0{,}7$.

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~ Dan is $|-1(e^{-0{,}7} - 2\cdot -0{,}7) + 1| = |-0{,}897| < 1$

Dus de functie $f(x)$ wordt:

$g(x) =$ ~~[illegible]~~ $\alpha(e^x - x^2) + x = -(e^x - x^2) + x$

✓ g' continu

b $\varepsilon_n = \frac{k}{1-k}|x_n - x_{n+1}|$ met k de convergentiewaarde

$k = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}$

4

2a $e^x + y = 1$ $x^2 + y^2 = 1$ $(x,y) = (0,1)$ $(x_0, y_0) = (1,1)$

$\boxed{9}$ Newton $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - J^{-1}(\vec{x}_n)\, f(\vec{x}_n)$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix} \qquad J^{-1} = \frac{1}{e^x \cdot 2y - 2x} \begin{bmatrix} 2y & -1 \\ -2x & e^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2y}{e^x 2y - 2x} & \frac{-1}{e^x 2y - 2x} \\ \frac{-x}{e^x y - x} & \frac{e^x}{2e^x y - 2x} \end{bmatrix}$$

4 $$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{y}{e^x y - x} & \frac{-1}{2(e^x y - x)} \\ \frac{-x}{e^x y - x} & \frac{e^x}{2(e^x y - x)} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e^x + y - 1 \\ x^2 + y^2 - 1 \end{bmatrix}$$ = Iteratievoorschrift Newton methode

b Het nadeel is dat de inverse moet worden berekend (en dat die bestaat en continu is)

Je kunt dit omzeilen door $f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ in te vullen. Je krijgt

2 zo de Secant-methode.

hoe dit in meer D hoe J^{-1}

c) $(x_0, y_0) = (0,0)$ is niet geschikt als startoplossing omdat je dan als antwoord ~~[illegible]~~ geen bestaande inverse Jacobiaan kan krijgen.

3 $\frac{1}{e^x y - x}$ wordt dan $\frac{1}{1 \cdot 0 - 0} = \frac{1}{0}$ wat niet mag. Een voorwaarde voor de Newton-methode is dat de Jacobiaan^{-1} gedefinieerd is op het hele interval.

18

3a) $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2 = \int_0^1 f(x)\,dx$

$n=50 \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{50} = \frac{1}{50} = 0{,}02$

Trapeziumregel: $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f\,dx = \frac{h}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)$

3 $\int_{0,4}^{0,42} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{0,4}} + \frac{1}{\sqrt{0,42}}\right) = 0{,}1\left(\frac{1}{\sqrt{0,4}} + \frac{1}{\sqrt{0,42}}\right) = 0{,}3124$

De bijdrage van het deelinterval is 0,3124.

b) Simpsonregel: $\frac{h}{6}\left(f(x_{i-1}) + 4\left(\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right) + f(x_i)\right) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$.

Het zal geen optimale convergentie zijn, omdat

2½ de functie f niet goed gedefinieerd is op $x=0$. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ op $x=0$ gaat niet.
Ook de afgeleides blijven een wortel houden onder de deelstreep.

$f^{(4)}$ onbegrensd

c) $I = \int_0^1 6x^2\,dx$

Convergentieorde bepalen: $\varepsilon_h / \varepsilon_{h/2} = \varepsilon_n / \varepsilon_{2n} = \frac{1{,}250\cdot 10^{-1}}{3{,}125\cdot 10^{-2}} = 4$

4 $\frac{3{,}125\cdot 10^{-2}}{7{,}813\cdot 10^{-3}} = 4 \qquad 1{,}221\cdot 10^{-4} / 3{,}052\cdot 10^{-5} = 4$.

Het is dus 2e orde convergentie (per verdubbeling van 2 wordt de fout 4 x zo klein).

$3{,}052\cdot 10^{-5} \cdot 0{,}25^a = 1\cdot 10^{-8} \Rightarrow 0{,}25^a = \frac{1\cdot 10^{-8}}{3{,}052\cdot 10^{-5}} \Rightarrow a = \frac{\log\left(\frac{1\cdot 10^{-8}}{3{,}052\cdot 10^{-5}}\right)}{\log(0{,}25)} = 5{,}8$.

Er zijn dus nog 6 verdubbelingen van n (oftewel gridhalveringen) nodig om een fout van maximaal $1\cdot 10^{-8}$ te hebben.

d) Schatting voor $I(64)$

Locale fout: $\varepsilon_i = \frac{h^3}{24} f''(x)$ Globale fout $\varepsilon_n \leq n \cdot \frac{h^3}{24} M$

met $M \geq f''(x)_{max}$ en $n = \frac{(b-a)}{h}$ $\quad f(x) = 6x^2 \to f'(x) = 12x \to f''(x) = 12$.

4 $\varepsilon_n \leq (b-a) \cdot \frac{h^3}{24h} \cdot 12 = (b-a)\cdot\frac{h^2}{2} = (1-0)\cdot\frac{h^2}{2} = 1\cdot\frac{\left(\frac{1}{64}\right)^2}{2} = 1{,}2207\cdot 10^{-4}$

eigenlijk via $\varepsilon = \frac{1}{3}(I_{64} - I_{32})$

Dus een schatting van de fout op $I(64)$ op basis van $I(n)$ benaderingen is $1{,}221\cdot 10^{-4}$. Dit komt overeen met de echte fout!

e) $I_2(h/2) = I(h/2) + \frac{I(h/2) - I(h)}{4^1 - 1} = I(64) + \frac{I(64) - I(32)}{3} = 2$.

Dit is een betere benadering van de integraal dan $I(128)$!
(Waarschijnlijk is het nog niet echt 2, maar kan de rekenmachine het niet in meer decimalen geven.)

$I_{4,1}(h/2) = I_4(h/2) + \frac{I(h/2) - I(h)}{4^4 - 1} = I(64) + \frac{I(64) - I(32)}{3}$

4

4a) $y' = -4y + x^2 \qquad y(0) = 1 \qquad [0,1]$

11

$y_{n+1} = y_n + h(f(x_{n+1}, y_{n+1}))$

$= y_n + h(-4y_{n+1} + x_{n+1}^2) = y_n - 4hy_{n+1} + hx_{n+1}^2$

$y_{n+1} + 4hy_{n+1} = y_n + h(x_{n+1})^2 \qquad (4h+1)y_{n+1} = y_n + hx_{n+1}^2$

4

$y_{n+1} = \frac{y_n + hx_{n+1}^2}{4h+1}$. Dit is stabiel indien $\frac{1}{4h+1} < 1 \quad 4h+1 > 1 \quad 4h > 0$

$h > 0$, dus dit kan altijd en de methode is stabiel.

b)(1) Rechthoekmethode voor numerieke integratie: $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = h\left(f(x_{i-1}) + \frac{h}{2}\right)$

$y_{n+1} - y_n = h\left(f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}\right) \quad f(x_{n+1/2}, y_{n+1/2})$

2

$y_{n+1} = y_n + h(-4y_n + x_n^2) + \frac{h^2}{2} = (1-4h)y_n + hx_n^2 + \frac{h^2}{2}$

De uitdrukking voor de rechthoekmethode is dus $y_{n+1} = (1-4h)y_n + hx_n^2 + \frac{h^2}{2}$.

(2) Dit behoort tot de 2^e orde, expliciete, 2-staps methode.

c) Als je $y(h/2)$ en $y(h)$ weet dan kun je deze samen schrijven in 1 uitdrukking van een nieuwe oplossing $\hat{y}(h/2)$ en wel op de volgende manier: $\hat{y}(h/2) = \frac{4}{3}y(h) - \frac{1}{3}y(h/2)$.

1

De orde van nauwkeurigheid wordt hoger. Dus je krijgt ipv $O(h^3)$ nu $O(h^4)$.

banis 3^e orde!

d) Trapezium-methode: $y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}\left(f(y_{n+1}, x_{n+1}) + f(y_n, x_n)\right)$

Expliciete Eulermethode: $y_{n+1} = y_n + h(f(y_n, x_n))$

Impliciete Euler methode: $y_{n+1} = y_n + h(f(y_{n+1}, x_{n+1}))$

Optellen van impliciete en expliciete Euler geeft: $2y_{n+1} = 2y_n + h(f(y_n, x_n)) + h(f(y_{n+1}, x_{n+1}))$

3

$2y_{n+1} - 2y_n = h\left(f(y_{n+1}, x_{n+1}) + f(y_n, x_n)\right)$

$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}\left(f(y_{n+1}, x_{n+1}) + f(y_n, x_n)\right)$ = Trapeziummethode.

5a) Iteratiematrix $M = N^{-1}P$ Jacobi: $N = D \quad P = -(R+L)$

14

$N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \qquad P = -(R+L) = \begin{pmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -4 & 0 & -6 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

5

$N^{-1}P = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -6 & -2 \\ -4 & 0 & -6 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{6}{20} & -\frac{2}{20} \\ +\frac{4}{20} & 0 & \frac{6}{20} \\ -\frac{2}{20} & -\frac{6}{20} & 0 \end{pmatrix} = M$

Lineaire convergentiefactor $\mu = \max \sum \left|\frac{a_{ic}}{a_{ij}}\right| = \frac{10}{20} = 0{,}5$.

b De methode van Gauß-Seidel is convergent, want de matrix A is diagonaal dominant. $20>8$ $|-20|>10$ en $20>8$.

3

c Je kunt de optimale parameter w_{opt} bepalen door de spectraalradius van de iteratiematrix van de Jacobi-methode te nemen $\sigma(M_j)$

3 Vervolgens is $w_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\sigma(M_j)^2}}$.

d) Stel A is een tri-diagonale matrix. A is dan van de vorm:

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_n \\ 0 & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

. Schrijf A om naar twee matrices, van de vorm:

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \\ 0 & b_n & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & \gamma_n \\ & & 1 \end{pmatrix} = U$$

3

Hierbij verkrijg je α en γ uit de eerdere waardes van a, b, c. hoe?

Deze matrices zijn nu gemakkelijk op te lossen via het oplossen van LU factorisatie.

$LUx=b$ los je op door $Ly=b$ op te lossen en vervolgens $Ux=y$.

Het voordeel van een tridiagonale matrix is dat je hem zo kan opslaan (door alle nullen niet op te slaan) dat het weinig geheugen → minder rekentijd kost.

hoe?

6 a) $[0\,1]$ $\varphi(x,t)$ $\frac{\partial}{\partial t} = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ $k=10^{-3}$ $\varphi(x,0)=100\sin(\pi x)$ $\varphi(0,t)=\varphi(1,t)=0$.

$\boxed{9}$ Expliciete Euler: $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ h is tijdstap Δt

4 $f(x_{n+1}x_n, x_{n-1}) := \frac{D\cdot(u_{m+1} \cancel{u_m} -2u_m+u_{m-1})}{\Delta x^2}$ $D=$ diffussieconstante $k=10^{-3}$

Invullen geeft $u_m^{n+1} = u_m^n + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n)$. Noem $\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} =: r$

Dan krijg je $u_m^{n+1} = ru_{m+1}^n + (1-2r)u_m^n + ru_{m-1}^n$

3

b) Er is stabiliteit als $r \le 1/2$ waarom? $r = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{k\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{10^{-3}\Delta t}{(\frac{1}{200})^2} = 40\Delta t$

3 $40\Delta t \le \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta t$ is maximaal $\frac{1}{80}$.

c) Een voordeel van impliciete tijdsdiscretisatie is dat het altijd stabiel is. Een nadeel is dat het soms lastiger uit te rekenen is, omdat je niet altijd gemakkelijk ~~[illegible]~~ een omschrijving kan maken. Dan kan het meer geheugen kosten omdat je meer stappen moet uitrekenen. $Ax=b$

2